Lycée Pilote Bizerte : Mme Lamia Khemiri
Lycée Pilote Monastir : F . Zemni
M . Hassine – H . Yakoubi – M . Krir
Lycée Rue Fattouma Bourguiba :
A . Abbes
Lycée Hédi Khéfacha :
M . Mansour – I . Aguir
Lycée Bennane-Bodheur : A . Bouhouch
Lycée Privé International : F. Zemni

Devoir de synthèse n°1 *4 Math*

MATHEMATIQUES

Durée : 3 h **Le 15/12/2020**

Exercice 1 : (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \frac{1}{5}\left(x^2 - 5\right)$ et U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = \frac{5}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

1) a) Dresser le tableau de variation de f .
   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\sqrt{5} \leq U_n \leq \frac{5}{2}$
   c) Montrer que U est monotone, en déduire que U est convergente puis déterminer sa limite
2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} - \sqrt{5} = \frac{1}{5}\left(U_n - \sqrt{5}\right)\left(5 - \sqrt{5} - U_n\right)$
   b) On pose $\lambda = 1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} - \sqrt{5} \leq \lambda\left(U_n - \sqrt{5}\right)$
   c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n - \sqrt{5} \leq \frac{\lambda^n}{3}$.
   d) Retrouver alors la limite de la suite U.
3) Soit $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} U_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sqrt{5} \leq S_n \leq \sqrt{5} + \frac{1}{3n}\left(\frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}\right)$
   b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.
4) On donne $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} U_k^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sigma_n = 5n + \frac{25}{2} - 5U_n$.
   b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sigma_n}{n}$
5) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $P_n = U_1 \times U_2 \times ...... \times U_n$ et $V_n = \frac{1}{P_n}$
   a) Donner un encadrement de P_n
   b) En déduire que la suite (V_n) est convergente et calculer sa limite

Exercice 2 : (5 points)

A) Soit m un nombre complexe non nul.

On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_m) : $2z^2 - 2(m+1+i)z + m^2 + (1+i)m + i = 0$.

1) Montrer que le discriminant de l'équation (E_m) est $\Delta = (2im)^2$.

2) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_m).

B) Dans cette partie, on suppose que $m \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, i\}$.

Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A, B, M, M_1 et M_2 d'affixes respectives 1, i , m , $z_1 = \frac{(1-i)(m+i)}{2}$ et $z_2 = \frac{(1+i)(m+1)}{2}$. Soit I le milieu du segment [AB].

Soit f l'application du plan P dans lui-même qui à tout point N d'affixe z associe le point N' d'affixe z' tel que $z' = iz + 1$.

1) a) Montrer que f est une isométrie.

b) Montrer que I est le seul point invariant par f.

c) Montrer que f est une rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

d) Vérifier que $f(M_1) = M_2$.

2) a) Vérifier que $\frac{z_1 - m}{z_2 - m} = i.\left(\frac{m-1}{m-i}\right)$.

b) En déduire que si M est situé sur le cercle (Γ) de diamètre [AB], alors les points M, M_1 et M_2 sont alignés.

3) a) Vérifier que $z_2 - z_1 = im$ et déduire que $M_1M_2 = OM$, ainsi que la position relative des droites (M_1M_2) et (OM).

b) Montrer que $\overrightarrow{IM_1} + \overrightarrow{IM_2} = \overrightarrow{OM}$.

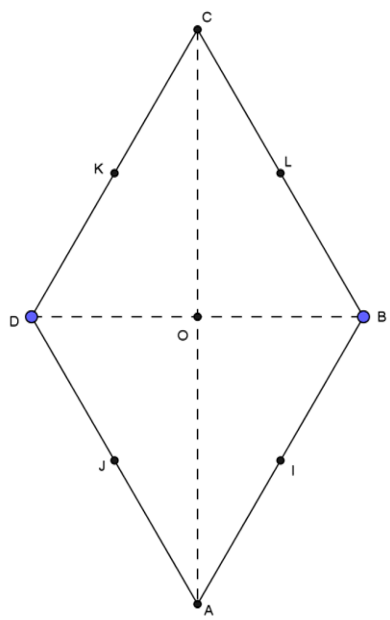
c) On a tracé dans la page annexe le cercle (Γ) de diamètre [AB] et on a placé sur (Γ) le point M. Construire, en justifiant, les points M_1 et M_2.

Exercice 3 : (5 points)

Dans la figure ci - contre ABCD est un losange de centre O tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

I , J ,K et L sont les milieux respectifs des segments $[AB]$; $[AD]$; $[DC]$ et $[BC]$

On note : $f = R_{(A, \frac{\pi}{3})} \circ t_{\overrightarrow{KB}}$ et $g = R_{(A, \frac{\pi}{3})} \circ t_{\overrightarrow{JI}}$



1) a) Vérifier que : $S_{(AC)} \circ S_{(AB)} = S_{(AD)} \circ S_{(AC)}$.

b) Déterminer l'image du point K par $S_{(AB)} \circ t_{\overrightarrow{KB}}$

c) Déterminer alors la droite Δ' telle que $t_{\overrightarrow{KB}} = S_{(AB)} \circ S_{\Delta'}$

d) Caractériser alors l'isométrie f .

2) Les droites (DC) et (IJ) se coupent au point E

a) Montrer que le triangle OAE est équilatéral.

b) Déterminer les images des points J , O et D par g.

c) En déduire que g est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$.

3) Soit h l'isométrie tel que $g \circ h = R_{(A,\frac{\pi}{3})} \circ S_{(IJ)}$.

a) Montrer que $h = t_{\overrightarrow{BO}} \circ S_{(IJ)}$.

b) Montrer que $h \circ S_I = S_{(AC)}$.

4) Les droites (AC) et (IJ) se coupent au point H . On note Δ la droite passante par H et perpendiculaire à (AD) . Les droites Δ et (AD) se coupent au point F.

a) Montrer que : $g \circ h = S_{(AD)} \circ S_H$.

b) En décomposant S_H en deux symétries orthogonales convenables, montrer que $g \circ h$ est la symétrie glissante d'axe Δ et de vecteur $2\overrightarrow{HF}$.

c) On note G le symétrique de A par rapport à la droite (HF) et N le symétrique de H par rapport au point F . Montrer que le quadrilatère GENH est un parallélogramme .

Exercice 4 : (5 points)

On donne dans l'annexe ci-jointe la courbe C_f dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'une fonction f définie et dérivable sur $]0,+\infty[$. Les axes du repère sont des asymptotes à C_f .

On suppose que f(1) = c avec $c \in]0,1[$.

La tangente T à C_f au point d'abscisse 1 coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée $c + \frac{1}{2}$.

I)1) Par une lecture graphique donner le tableau de variation de f.

2) a) Montrer qu'une équation cartésienne de la tangente T est : $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + c$

b) En déduire que : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x+\sqrt{x+1})-c}{x} = -\frac{3}{4}$.

II) On suppose de plus que pour tout $x > 0$; $f'(x) = \frac{-1}{x^2+x}$.

On note h la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} h(x) = \dfrac{x}{f(x)} & \text{si } x > 0 \\ h(0) = 0 \end{cases}$

1) a) Montrer que h est continue et dérivable à droite en 0 .

b) Montrer que h est strictement croissante sur $[0,+\infty[$

c) Dresser le tableau de variation de h.

2) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = x - f^2(x)$

a) Dresser le tableau de variation de g.

b) En déduire qu' il existe un unique réel $\beta \in]0,+\infty[$ tel que $g(\beta) = 0$

c) En déduire la position relative de C_f et C_h

d) On a placé sur l'annexe le réel β sur l'axe des abscisses .

Construire le point d'intersection de C_f et C_h puis tracer C_h sur l'annexe .

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=n}^{2n} \frac{f(k)}{k}$

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que pour tout $k \in \{ n, n+1, \dots\dots\dots, 2n \}$ on a : $\frac{f(2n)}{2n} \le \frac{f(k)}{k} \le \frac{f(n)}{n}$

b) En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 0$

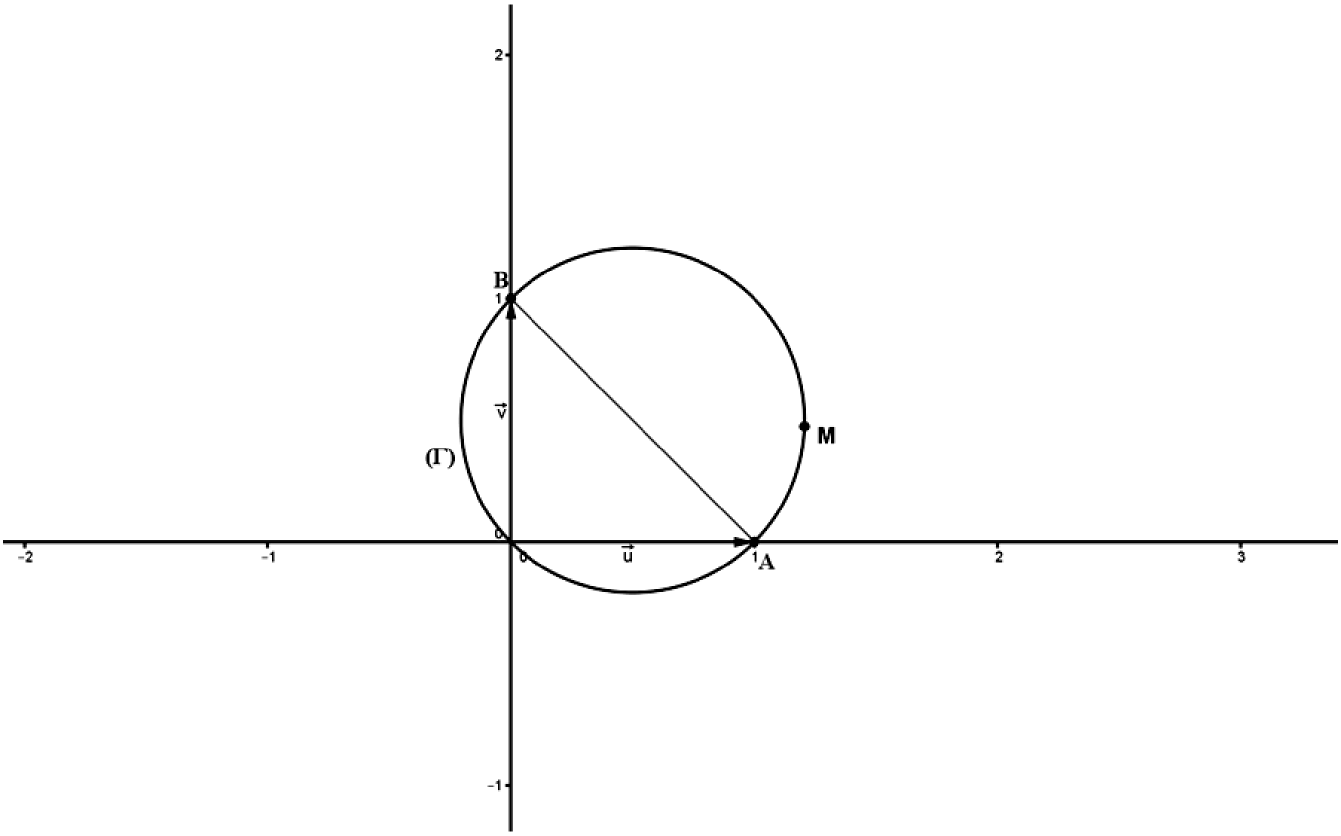
4) a) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$; $\frac{1}{x+1} \le f(x)$

b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=n}^{2n} \frac{1}{k(k+1)} = 0$.

Annexe à rendre avec la copie

Nom et prénom : ....

Exercice 2 :



Exercice 4 :